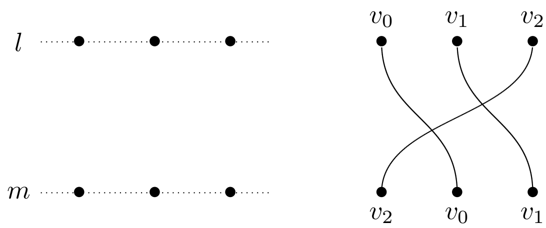
単体の向きと単体的複体の鎖複体

一般の位置にある点 $v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_n$ を考える。これらを頂点とする単体は $|v_0v_1\ldots v_n|$ のように頂点を並べて表示することができるが、このとき、頂点の並べ方を変えてもできる単体は同じものである。単体の「向き」の概念を次のように導入する。単体の「向き」とは、頂点の並べ方のこととする。ただし、$(n+1)!$ 通りある並べ方の中をふたつのグループに分けて、同じグループの並べ方は「同じ向き」、違うグループの並べ方は「逆の向き」と考える。「向き」を考えたときの単体は $\langle v_0, v_1, \ldots, v_n\rangle$ のように表す。ふたつの並べ方 $\langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\rangle$, $\langle v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}\rangle$ が同じであるかどうかは、次のようにして判定する。平面上に水平な直線 l をとり、その上に $n+1$ 個の点を等間隔にとる。またこれを垂直方向に移動して、直線 m と、その上の $n+1$ 個の点を作る（下図左）。l 上の点に左から順に $v_{i_0},\ v_{i_1},\ \ldots,\ v_{i_n}$ とラベルを付ける。これはそれらの点の実際の位置とは無関係である。次に、m 上の点に左から順に $v_{j_0},\ v_{j_1},\ \ldots,\ v_{j_n}$ とラベルを付ける。下図右は、$\langle v_0, v_1, v_2\rangle$, $\langle v_2, v_0, v_1\rangle$ の場合のラベル付けが示されている。そして、２直線 $l,\ m$ の間で、同じラベルの点同士を曲線で結ぶ。このとき、曲線同士が接したり、３本以上の曲線が一点で交わったりしないようにする。



曲線たちの交点の個数は、曲線の取り方により色々変わるが、その値が偶数であるか、奇数であるかということは、取り方によらない。これが偶数であるときは、

$$\langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\rangle = \langle v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}\rangle$$

と考え、これが奇数であるときは、

$$\langle v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\rangle = -\langle v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}\rangle$$

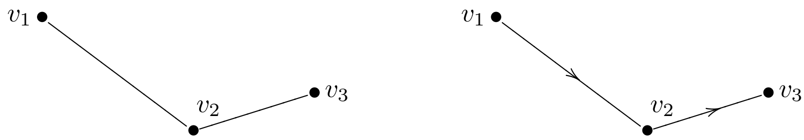
と考える。上の図の例では、交点の個数は２で偶数であるから、$\langle v_0, v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_0, v_1\rangle$ である。なお、$n = 0$ の場合は、並べ方が一通りしかないので、標準的な向きとして、$\langle v_0\rangle$ を考え、形式的にその逆向きを $-\langle v_0\rangle$ を考える。

さて、(有限な) 単体的複体 K を考える。K に属する単体たちに、それぞれ、向きを決めておく。

定義. 整数 i に対し、K の i 単体たちを基底とする線形空間を $C_i(K;\mathbb{R})$ で表す。すなわち

$$C_i(K;\mathbb{R}) = \left\{ \sum_{\sigma:K\text{ の } i \text{ 単体}} r_\sigma \sigma \;\middle|\; r_\sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

例. 複体 $K = \{|v_1v_2|, |v_2v_3|, |v_1|, |v_2|, |v_3|\}$ (下図左) を考える。下図右のように向きを付けよう。



このとき、

$$\begin{aligned}
C_1(K;\mathbb{R}) &= \{r_1\langle v_1, v_2\rangle + r_2\langle v_2, v_3\rangle | r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \\
C_0(K;\mathbb{R}) &= \{s_1\langle v_1\rangle + s_2\langle v_2\rangle + s_3\langle v_3\rangle | s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}\} \\
C_i(K;\mathbb{R}) &= 0 \qquad i \neq 0, 1
\end{aligned}$$

注意. もし、上の例で 1 単体 $|v_1 v_2|$ に上とは逆の向きを与えたとすると、

$$\begin{aligned}
C_1(K;\mathbb{R}) &= \{r_1\langle v_2, v_1\rangle + r_2\langle v_2, v_3\rangle | r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(-r_1)\langle v_1, v_2\rangle + r_2\langle v_2, v_3\rangle | r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

であるから、これは上の定義と一致する。つまり、線形空間 $C_i(K;\mathbb{R})$ は各 i 単体の向きによらず定義されており、単体の向きを決めることは、その線形空間の基底の取り方を決めることと考えられる。

定義. 線形写像 $\partial : C_i(K;\mathbb{R}) \to C_{i-1}(K;\mathbb{R})$ を、基底の元 $\langle v_0, v_1, \ldots, v_i\rangle$ に対しては

$$\begin{aligned}
\partial(\langle v_0, v_1, \ldots, v_i\rangle) =& \langle v_1, v_2, \ldots, v_i\rangle - \langle v_0, v_2, \ldots, v_i\rangle + \langle v_0, v_1, v_3, \ldots, v_i\rangle \\
& - \cdots + (-1)^{i-1}\langle v_0, v_1, \ldots, v_{i-2}, v_i\rangle + (-1)^i\langle v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}\rangle
\end{aligned}$$

と定め、一般の元に対しては、これを線形に拡張することによって定める。

例. 上の例で、$\partial : C_1(K;\mathbb{R}) \to C_0(K;\mathbb{R})$ は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\partial(r_1\langle v_1, v_2\rangle + r_2\langle v_2, v_3\rangle) &= r_1\partial(\langle v_1, v_2\rangle) + r_2\partial(\langle v_2, v_3\rangle) \\
&= r_1(\langle v_2\rangle - \langle v_1\rangle) + r_2(\langle v_3\rangle - \langle v_2\rangle) \\
&= (-r_1)\langle v_1\rangle + (r_1 - r_2)\langle v_2\rangle + r_2\langle v_3\rangle
\end{aligned}$$

K の (向きのついた)i 単体を $a_1, \ldots, a_n$ 、(向きのついた)$(i-1)$ 単体を $b_1, \ldots, b_m$ とする。

$$\partial(a_j) = d_{1j}b_1 + d_{2j}b_2 + \cdots + d_{mj}b_m \qquad d_{kj} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n$$

とおく。これは、数ベクトル

$$\vec{v}_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ d_{2j} \\ \vdots \\ d_{mj} \end{pmatrix}$$

で表すことができる。この数ベクトル $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ を並べてできる行列

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

は、基底 $a_1, \ldots, a_n$ および $b_1, \ldots, b_m$ に関する線形写像 $\partial : C_i(K;\mathbb{R}) \to C_{i-1}(K;\mathbb{R})$ の行列表示である。

例. 上の例で、基底をそれぞれ、$\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_2, v_3\rangle$ および $\langle v_1\rangle, \langle v_2\rangle, \langle v_3\rangle$ ととると、$\partial : C_1(K;\mathbb{R}) \to C_0(K;\mathbb{R})$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

一般の K では、以上より、次のような線形写像の列が得られる。これを K の（実係数）**鎖複体**という。0 の続くところは省略して書くと、もし K が n 次元ならば、次のようになる：

$$0 \to C_n(K;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}(K;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_1(K;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} C_0(K;\mathbb{R}) \to 0$$

さらに、上で述べたように各 ∂ は行列で表すことができる。実は、この情報から、元の K を復元することができる。

例. K の鎖複体が $0 \to C_1(K;\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} C_0(K;\mathbb{R}) \to 0$ の形をしており、∂ が行列

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表されているとする。列の数が 3 なので $C_1(K;\mathbb{R})$ は 3 次元線形空間であり、1 単体の個数が 3 であることがわかる。また行の数が 4 なので $C_0(K;\mathbb{R})$ は 4 次元線形空間であり、0 単体の個数が 4 であることがわかる。そこで、1 単体を e_1, e_2, e_3 とし、0 単体を v_1, v_2, v_3, v_4 とする。第 1 列が $\partial(e_1)$ の数ベクトル表示であるから、

$$\partial(e_1) = -\langle v_1\rangle + \langle v_2\rangle$$

がわかる。同様に、第 2 列および第 3 列から

$$\partial(e_2) = -\langle v_2\rangle + \langle v_3\rangle, \qquad \partial(e_1) = \langle v_2\rangle - \langle v_4\rangle$$

がわかる。つまり、

$$e_1 = \langle v_1, v_2\rangle, \qquad e_2 = \langle v_2, v_3\rangle, \qquad e_3 = \langle v_4, v_2\rangle$$

である。これを図示すると下図のようになる。