幾何学 II 模擬試験

[1] (ア)〜(オ) の各閉曲面は次の (1)(2)(3) のどれになるか、理由をつけて答えなさい。(2)(3) の場合は、m の値も答えること。

(1) S^2　　(2) $T^2\#\dots\#T^2$ (m 個の T^2 の連結和)　　(3) $P^2\#\dots\#P^2$ (m 個の P^2 の連結和)

(ア) $T^2\#KB$　　(イ) $P^2\#T^2\#T^2$　　(ウ) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$　　(エ) $adba^{-1}cd^{-1}cb$　　(オ) $abcacb$

[2] 閉曲面 $M = KB\#T^2$ およびワード表示 $abcdc^{-1}db^{-1}a$ を持つ閉曲面 N について、以下の問いに答えなさい。

1. セル分割をひとつずつ示しなさい。
2. 上の分割に関する実係数鎖複体を記述しなさい。特に線形写像 ∂ の行列表示も求めなさい。
3. 実係数ホモロジー群の次元 $\dim H_i(\sim;\mathbf{R})$ $(i=0,1,2)$ を計算しなさい。
4. オイラー標数 $\chi(\sim)$ を計算しなさい。
5. M と N は位相的に同じ図形ですか。理由をつけて答えなさい。

幾何学演習 II 模擬試験

[1] 平面の点 A(0,0), B(4,−4), C(6,4) を頂点とする三角形を考える。次の問いに答えなさい。

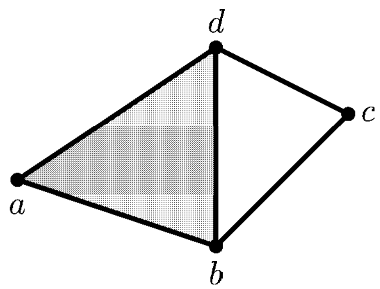
(1) 点 B の △ABC における重心座標を求めなさい。

(2) △ABC における点 P(3,0) の重心座標を求めなさい。

(3) △ABC における重心座標が $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ であるような点 Q の普通の座標を求めなさい。

(4) △ABC における重心座標 (α,β,γ) が方程式 $\alpha = \frac{1}{2}$ を満たすような点 R の全体はどのような図形を作るか、下の図 (省略) に書き込んで答えなさい。

[2] 右の図で表される単体複体 K について以下の問いに答えなさい。ただし、塗りつぶされている三角形には 2 単体があるものとします。



(1) K の鎖複体を記述しなさい。特に線形写像 ∂ の行列表示も求めなさい。用いた 1 単体, 2 単体の向きを図に書き込みなさい。

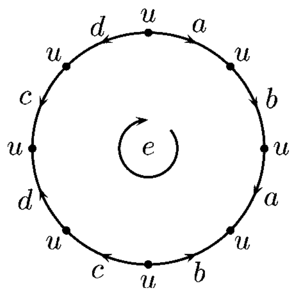
(2) 実係数ホモロジー群の次元 $\dim H_i(K;\mathbf{R})$ $(i=0,1,2)$ を計算しなさい。

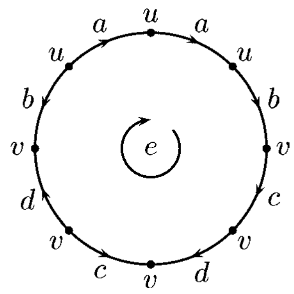
講義で説明できなかった問題の略解

幾何学 II

[**2**]

(1) M のセル分割はワード表示 $abab^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ に対応するものを考えます（下図左）。N のセル分割は与えられたワード表示 $abcdc^{-1}db^{-1}a$ に対応するものを考えます（下図右）：





M はひとつの 0 セル、4 つの 1 セル、ひとつの 2 セルから出来ています。N は 2 つの 0 セル、4 つの 1 セル、ひとつの 2 セルから出来ています。

(2) どちらも次の形をしています。ただし、C_i や ∂_i は下表のとおり。

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

(3)(4) 下表のとおり。

	M	N
C_2 の基底	e	e
C_1 の基底	a, b, c, d	a, b, c, d
C_2 の基底	u	u, v
∂_2 に対応する行列	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$
∂_1 に対応する行列	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\dim H_2$	0	0
$\dim H_1$	3	2
$\dim H_0$	1	1
オイラー標数 χ	-2	-1

(5) オイラー標数が異なるので、ふたつは異なる図形です。

幾何学演習 II

[**2**]

(1) $0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$

C_2 の基底：$\langle a,b,d\rangle$

C_1 の基底：$\langle a,b\rangle$, $\langle a,d\rangle$, $\langle b,c\rangle$, $\langle b,d\rangle$, $\langle c,d\rangle$

C_0 の基底：$\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$, $\langle c\rangle$, $\langle d\rangle$

（図は省略。上で与えた向きを用いています。）

$$\partial_2 \text{ の行列表示：} \begin{array}{c} \\ \langle a,b\rangle \\ \langle a,d\rangle \\ \langle b,c\rangle \\ \langle b,d\rangle \\ \langle c,d\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle a,b,d\rangle \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\partial_1 \text{ の行列表示：} \begin{array}{c} \\ \langle a\rangle \\ \langle b\rangle \\ \langle c\rangle \\ \langle d\rangle \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \langle a,b\rangle & \langle a,d\rangle & \langle b,c\rangle & \langle b,d\rangle & \langle c,d\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

（単体の向きや順番を変えれば、行列も変わります。各行や列がどの単体に対応しているか、そばに書いておくと、間違いを防ぐのに役立ちます。）

(2) $\dim H_0(K;\mathbf{R}) = 1$, $\dim H_1(K;\mathbf{R}) = 1$, $\dim H_2(K;\mathbf{R}) = 0$