幾何学演習 I 問題 No.1

1. 平面上の点 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(3,0)$ を通る直線 l を考える。
   (1) この直線をいろいろな式で表してみよう。
   (2) 点 A を通り、l と直交する直線をいろいろな式で表してみよう。
   (3) 点 $\mathrm{C}(1,-1)$ を通り、l と平行な直線をいろいろな式で表してみよう。

2. 空間のベクトル $\vec{a}=(1,-2,0)$, $\vec{b}=(-2,1,-1)$, $\vec{c}=(0,1,3)$ を考える。
   (1) それぞれのベクトルの大きさを計算しよう。
   (2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ を計算しよう。
   (3) ベクトル積 $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{a}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ を計算しよう。
   (4) ベクトル $\vec{a}=(1,-2,0)$, $\vec{b}=(-2,1,-1)$ に垂直な単位ベクトルをすべてみつけよう。

3. 空間のベクトルに対して以下の式が成り立つことを証明してみよう。
   (1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$　(2) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$　(3) $(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$
   (4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$　(5) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
   (6) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$
   (7) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, ただし θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角。

4. 空間の点 $\mathrm{A}(1,0,1)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$ を通る直線 l を考える。
   (1) l を含むような平面をいろいろ見つけてみよう。
   (2) l をいろいろな式で表してみよう。
   (3) 点 $\mathrm{C}(1,1,1)$ を通り、l に垂直な平面を見つけよう。
   (4) 点 $\mathrm{C}(1,1,1)$ を通り、l と直交する直線を見つけよう。

5. 次のような平面曲線をいろいろな式で表してみよう。ただし、a や c は正の定数とします。
   (1) 2 点 $(c,0)$, $(-c,0)$ からの距離の和が $2a$ であるような点全体の作る曲線。
   (2) 2 点 $(c,0)$, $(-c,0)$ からの距離の差の絶対値が $2a$ であるような点全体の作る曲線。
   (3) 2 点 $(a/\sqrt{2},0)$, $(-a/\sqrt{2},0)$ からの距離の積が $a^2/2$ であるような点全体の作る曲線。
   (4) 点 $(a,0)$ を中心とする半径 a の円 C の点 $(2a,0)$ における接線 m を考える。m 上の点 P に対して、線分 OP と円 C の交点を Q とするとき、OX = PQ となるような線分 OP 上の点 X の描く軌跡。
   (5) 点 $(0,a)$ を中心とする半径 a の円 C が、x 軸上を滑ることなく右方向に転がるとき、最初原点にあった点の描く軌跡。

6. a, b, c は定数で、$a>0$, $b>0$ とする。以下の方程式で与えられる図形は定数 c の値によりどのように変わるか調べてみよう。
   (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=c,$　(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=c$

7. 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ $(-1\leq x\leq 1)$ の長さを計算しよう。

8. 懸垂線 $y=\dfrac{1}{a}\cosh ax$ $(-c\leq x\leq c)$ の長さを計算しよう。