

幾何学・演習問題 No.3

次のおのおのの曲面に対し、以下のものをみつけなさい。ただし a, b, c は正の定数とします。

- (a) パラメータ表示
- (b) 単位法線ベクトル
- (c) 第一基本量 E, F, G
- (d) 第二基本量 L, M, N
- (e) ガウス曲率 K , 平均曲率 H
- (f) (もし有限ならば) 面積

1. 楕円放物面 : $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

2. 双曲放物面 : $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

3. 楕円面 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

4. 一葉双曲面 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

5. 二葉双曲面 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

6. 輪環面 (トーラス) : yz 平面の中心 $(2, 0)$, 半径 1 の円周を z 軸のまわりに一回転してえられる曲面

7. 関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \in D = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$) のグラフ

8. 半径 1, 高さ 1 の直円柱面 (シリンダー)

9. 擬球面 : yz 平面の曲線

$$y = e^{-u}, \quad z = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt \quad (0 \leq u < \infty)$$

を z 軸のまわりに一回転してえられる曲面

10. 懸垂面 (カテノイド) : yz 平面の曲線 $y = \cosh z$ を z 軸のまわりに一回転してえられる曲面