

数学要論 I 模擬試験その 2

[1] 命題 $\neg(P \vee Q) \iff ((\neg Q) \vee (\neg P))$ の真理表を作り、この命題が恒真命題であるかどうか調べなさい。

P	Q	\neg	$(P \vee Q)$	\iff	$((\neg Q) \vee (\neg P))$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

[2] f は X から Y への写像であり、 A, A' は X の部分集合、 B は Y の部分集合とします。以下の問いに答えなさい。

- A の f による像 $f(A)$ の定義を書きなさい。
- B の f による逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を書きなさい。
- 公式 $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ を証明しなさい。
- $X = Y = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ であるとき、 $f(A \cap A') \neq f(A) \cap f(A')$ であるような A, A' を具体的に与えて、集合 $f(A \cap A')$ および $f(A) \cap f(A')$ を求めなさい。
- f が単射のときに $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ が成り立つことを証明しなさい。

[3] $|Q| \leq |R - Q|$ であることを証明しなさい。

[4] 実数全体の集合の上の関係 $x \leq y$ は同値関係ではない理由を説明しなさい。

[5] 整数 n, m に対して 4 を法とした合同 ($n \equiv m \pmod{4}$) という関係を、

$$n \equiv m \pmod{4} \iff n - m \text{ が } 4 \text{ の倍数}$$

と定めます。以下の問いに答えなさい。

- 整数 2 の同値類 $C(2)$ を求めなさい。
- $C(2)$ の要素 m, n を任意に選ぶとき、それらの積 mn は必ず $C(0)$ の要素であることを証明しなさい。

[6] 各自然数 n に対し実数直線の部分集合 A_n を区間 $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ と定める。このとき $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ と $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ をそれぞれ求めなさい。