

数学要論 I・数学要論演習 I No.3

1. 次式で与えた写像 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は単射ですか？ 全射ですか？ 全単射ですか？
(1) $f(x) = x - 2$ (2) $f(x) = x^2$ (3) $f(x) = x^3$ (4) $f(x) = x^3 - x$
2. $A \subset X$ のとき $i(a) = a$ ($a \in A$) で定義される写像 $i: A \rightarrow X$ は必ず単射であることを示しなさい。この写像は包含写像とよばれます。特に $X = A$ のとき、この写像は $I_A: A \rightarrow A$ と書かれ A 上の恒等写像とよばれます。 I_A は全単射であることを示しなさい。(教科書 p.21)
3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ と部分集合 $A \subset X$ が与えられているとき、 A から Y への写像 $f|_A: A \rightarrow Y$ を $(f|_A)(a) = f(a)$ ($a \in A$) と定めます。この写像のことを f の A への制限といいます。 $f|_A = f \circ i$ が成り立つことを示しなさい。ただし $i: A \rightarrow X$ は包含写像です。
4. 全単射 $f: X \rightarrow Y$ と全単射 $g: Y \rightarrow Z$ の合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$ は全単射であることを示しなさい。またこのとき $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であることも示しなさい。
5. \mathbf{N} から $\mathbf{N} \cup \{0\}$ への全単射をひとつ作りなさい。その逆写像も求めなさい。
6. \mathbf{N} から $2\mathbf{N} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ への全単射をひとつ作りなさい。その逆写像も求めなさい。
7. 閉区間 $[0, 1]$ から半开区間 $(0, 1]$ への全単射をひとつ作りなさい。その逆写像も求めなさい。
8. 写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が与えられているとき、次の問に答えなさい。
 - (1) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し、 $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ が成り立つことを示しなさい。
 - (2) 任意の部分集合 $C \subset Z$ に対し、 $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$ が成り立つことを示しなさい。
9. f は関数 $f: X \rightarrow Y$ を表し、 A, A' は X の部分集合、 B, B' は Y の部分集合とします。以下のことを示しなさい。
 - (1) $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
 - (2) $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
 - (3) $f(A' - A) \supset f(A') - f(A)$
 - (4) $f^{-1}(B' - B) = f^{-1}(B') - f^{-1}(B)$

ここで使われている「 $-$ 」は教科書 p.14 で説明されている差集合を与える集合演算です。