

# 空間の分割

岡山理科大学 理学部 基礎理学科

田村 幸子  
難波 里恵

指導教授 山崎 正之

## 0. 導入

我々は図形（位相空間）を基本的な図形たちに分割する手法に関して研究を行った。基本的な図形とは単体（点、線分、三角形、およびその一般化）、胞体（位相的な単体）、およびそれから頂点を取り去って得られる理想単体・理想胞体である。

第一節では、三角形における重心座標について知られている事項をまとめた。第二節では、単体および単体複体の概念の導入と例を述べた。第三節では、結び目の補空間の理想単体・理想胞体への分割とその応用について述べた。扱った結び目は三葉結び目（下図左）と8の字結び目（下図右）である。

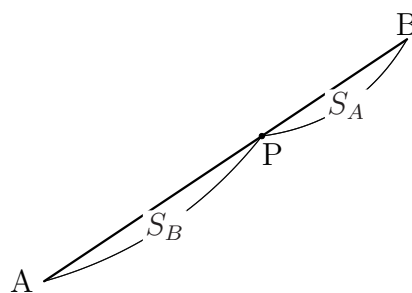


なお、作図には PSTricks パッケージ、emath パッケージ、KnotPlot ソフトウェアを用いた。

## 1. 線分・三角形の重心座標

いろいろな例で実際に計算を行ってみる。

線分 AB 上の点 P の位置が内分比  $(S_B : S_A)$  を用いて表すことができるのはよく知られている：



$$\overrightarrow{OP} = \frac{S_A \overrightarrow{OA} + S_B \overrightarrow{OB}}{S_A + S_B}.$$

ここで、

$$\alpha = \frac{S_A}{S_A + S_B}, \quad \beta = \frac{S_B}{S_A + S_B}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} \\ (\alpha + \beta &= 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0) \end{aligned}$$

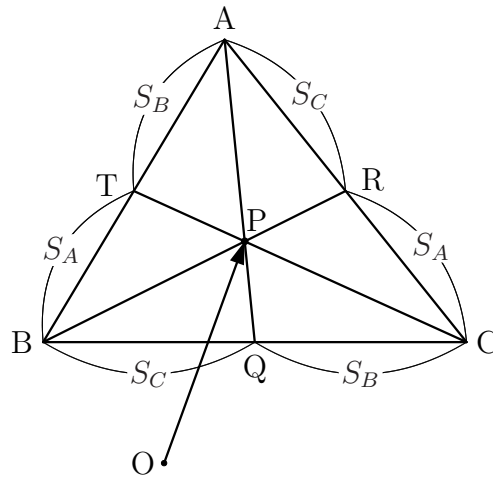
とかける。対  $(\alpha, \beta)$  を  $P$  の線分  $AB$  における重心座標という。この名前は、点  $A$ ,  $B$  にそれぞれ質量  $\alpha, \beta$  の質点があるときの重心の位置が  $P$  になることによる。

同様に、三角形  $ABC$  上の点  $P$  をとるとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} \\ (\alpha + \beta + \gamma &= 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0) \end{aligned}$$

と表せる。 $(\alpha, \beta, \gamma)$  を  $P$  の三角形  $ABC$  における重心座標という。

重心座標は次のようにして求めることができる。3つの三角形  $PBC$ ,  $PCA$ ,  $PAB$  の面積をそれぞれ  $S_A, S_B, S_C$  とする。直線  $AP$  と辺  $BC$  の交点を  $Q$ 、直線  $BP$  と辺  $CA$  の交点を  $R$ 、直線  $CP$  と辺  $AB$  の交点を  $T$  とおくと、 $Q, R, T$  はそれぞれ辺  $BC, CA, AB$  を  $S_C : S_B, S_A : S_C, S_B : S_A$  に内分する。



特に、次の式が成り立つ：

$$\overrightarrow{OP} = \frac{S_B}{S_B + S_C} \overrightarrow{OB} + \frac{S_C}{S_B + S_C} \overrightarrow{OC} .$$

さらに  $\triangle PBQ : \triangle PCQ = S_C : S_B$  であるから

$$\triangle PBQ = \frac{S_C}{S_B + S_C} S_A$$

である。これより

$$\begin{aligned} AP : PQ &= \triangle PAB : \triangle PBQ \\ &= S_C : \frac{S_C}{S_B + S_C} S_A = (S_B + S_C) : S_A \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C} \overrightarrow{OA} + \frac{S_B + S_C}{S_A + S_B + S_C} \overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{S_A \overrightarrow{OA} + S_B \overrightarrow{OB} + S_C \overrightarrow{OC}}{S_A + S_B + S_C}\end{aligned}$$

であるから、

$$\alpha = \frac{S_A}{S_A + S_B + S_C}, \quad \beta = \frac{S_B}{S_A + S_B + S_C}, \quad \gamma = \frac{S_C}{S_A + S_B + S_C}$$

となる。

これを用いて、色々な点の重心座標を求める。

(1) 重心の重心座標

Pが重心の場合、 $S_A = S_B = S_C$  であるから、

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$$

となる。

(2) 内心の重心座標

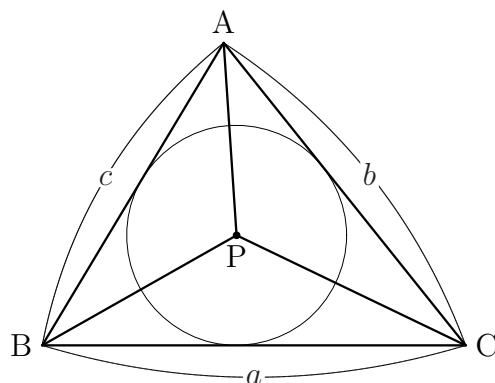
Pが内心の場合は、図のように各辺の長さを  $a, b, c$  とし、内接円の半径を  $r$  とおくと、

$$S_A = \frac{1}{2} ar, \quad S_B = \frac{1}{2} br, \quad S_C = \frac{1}{2} cr$$

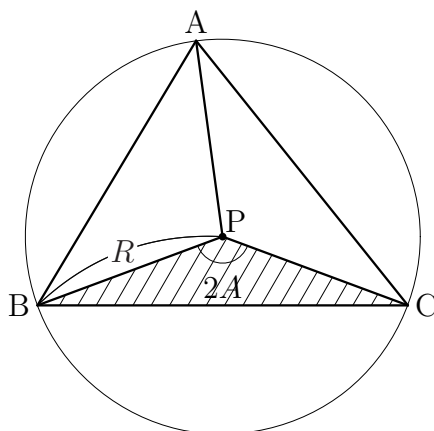
であるから、

$$\alpha = \frac{a}{a+b+c}, \quad \beta = \frac{b}{a+b+c}, \quad \gamma = \frac{c}{a+b+c}$$

となる。



(3) 外心の重心座標



Pが外心の場合は外接円の半径を  $R$  とおくと、 $\angle BPC = 2\angle A$  などより、

$$S_A = \frac{1}{2} R^2 \sin 2A, \quad S_B = \frac{1}{2} R^2 \sin 2B, \quad S_C = \frac{1}{2} R^2 \sin 2C$$

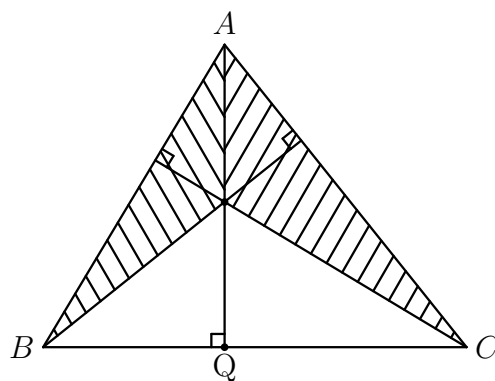
となるから、

$$\alpha = \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}, \quad \beta = \frac{\sin 2B}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C},$$

$$\gamma = \frac{\sin 2C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$$

となる。

(4) 垂心の重心座標



Pが垂心の場合は、

$$S_A : S_B : S_C = \tan A : \tan B : \tan C$$

となる。これは、

$$\tan B : \tan C = \frac{AQ}{BQ} : \frac{AQ}{CQ} = CQ : BQ = S_B : S_C$$

のようにして確かめることができる。したがって、

$$\alpha = \frac{\tan A}{\tan A + \tan B + \tan C}, \quad \beta = \frac{\tan B}{\tan A + \tan B + \tan C},$$

$$\gamma = \frac{\tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

である。

## 2. 単体複体

線分や三角形を拡張して単体の概念を導入する。この節の内容は [2] による。

三角形は、一直線上にない三点をとり、その三点を含む最小の凸集合と思える。三角形は二次元の図形だが、その三次元対応物は三角錐である。三角錐は、同一平面上にない四点を空間内にとり、その四点を含む最小の凸集合である。

このことから一般次元の三角形を定義するために、上に述べた「一直線上にない三点」、「同一平面上にない四点」を一般化する必要がある。

3点  $A_0, A_1, A_2$  が一直線上にないとは、 $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}$  が一次独立であること、すなわち

$$\alpha \overrightarrow{A_0A_1} + \beta \overrightarrow{A_0A_2} = \vec{0} \quad \text{ならば} \quad \alpha = \beta = 0$$

がなりたつことである。このとき、例えば  $A_1$  を始点とするふたつのベクトル  $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_0}$  も一次独立になっている。実際、

$$\alpha \overrightarrow{A_1A_2} + \beta \overrightarrow{A_1A_0} = \vec{0}$$

と仮定すると、

$$\alpha(\overrightarrow{A_0A_2} - \overrightarrow{A_0A_1}) + \beta(-\overrightarrow{A_0A_1}) = \vec{0}$$

$$\therefore \alpha \overrightarrow{A_0A_2} - (\alpha + \beta) \overrightarrow{A_0A_1} = \vec{0}$$

$$\therefore \alpha = \beta = 0$$

となる。つまり、どの頂点から出ている二つのベクトルも一次独立であることがいえる。

同様に四点  $A_0, A_1, A_2, A_3$  が同一平面上にないことは  $A_0, A_1, A_2$  または  $A_3$  から出ている三つのベクトルが一次独立であることと同値である。

一般に、 $N$ 次元ユークリッド空間の中の  $n+1$ 個の点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  に対し  $A_0$  を始点とする  $n$ 個のベクトル  $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$  が一次独立であるとき、それら

の点は一般の位置にあるという。このとき、 $A_0$  から出ている  $n$  個のベクトルの代わりに  $A_i$  ( $i \geq 1$ ) から出ている  $n$  個のベクトルも一次独立である。

$N$  次元ユークリッド空間の  $n + 1$  個の点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  が一般の位置にあるとき、それらを含む最小の凸集合を  $A_0, A_1, \dots, A_n$  を頂点とする  $n$  単体といい、 $|A_0, A_1, \dots, A_n|$  と表す。また、 $n$  を  $n$  単体  $|A_0, A_1, \dots, A_n|$  の次元という。

$n$  単体  $|A_0, A_1, \dots, A_n|$  の点  $P$  に対しても、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \alpha_0 \overrightarrow{OA_0} + \alpha_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{OA_n} \\ (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n &= 1, \quad \alpha_i \geq 0)\end{aligned}$$

となる  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  が存在する。これを  $P$  の重心座標と呼ぶ。

$n$  単体  $|A_0, A_1, \dots, A_n|$  の頂点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  から  $q + 1$  個の点を選べば、 $A_0, A_1, \dots, A_n$  が一般の位置にあることから、選んだ  $q + 1$  個の点も一般の位置にあり、この  $q + 1$  個の点を頂点とする  $q$  単体が定まる。これを  $n$  単体  $|A_0, A_1, \dots, A_n|$  の  $q$  面または面という。

例えば、2 単体  $|A_0, A_1, A_2|$  では、

- 0 面は 3 頂点  $|A_0|, |A_1|, |A_2|$
- 1 面は 3 つの辺  $|A_0, A_1|, |A_1, A_2|, |A_2, A_0|$
- 2 面は  $|A_0, A_1, A_2|$  自身

である。

$n + 1$  個の点から  $q + 1$  個の点を選ぶ選び方は  ${}_{n+1}C_{q+1}$  通りあるので、 $n$  単体には  $q$  面が  ${}_{n+1}C_{q+1}$  個ある。

定義： $N$  次元ユークリッド空間の中の有限個の単体からなる集合  $K$  が次の二つの条件を満たすとき、単体複体または単体的複体という。

- (1)  $S$  を  $K$  に属する単体とするとき、 $S$  の面はまた  $K$  に属する。
- (2)  $S, S'$  を  $K$  に属する二つの単体とし、 $S \cap S'$  が空でないとき、それは  $S$  の面であると同時に  $S'$  の面でもある。

$K$  に属する 0 単体を  $K$  の頂点という。また、 $K$  に属する単体の次元の最大次元を単体複体  $K$  の次元といい、 $\dim K$  とかく。

例 1.  $S$  を  $n$  単体とするとき、 $S$  の全ての面の集合を  $K(S)$  と表すと、 $K(S)$  は単体複体である。 $K(S)$  に含まれる単体の中で最高次元の単体は  $S$  自身であるので、 $K(S)$  の次元は  $n$  である。例えば、単体  $S$  が図 1 の 2 単体  $|A_0, A_1, A_2|$  のとき、

$$K(S) = \{|A_0, A_1, A_2|, |A_0, A_1|, |A_1, A_2|, |A_2, A_0|, |A_0|, |A_1|, |A_2|\}$$

である。これが条件 (1)(2) を満たすことは容易に確かめられる。また、含まれる単体の最大次元は 2 次元であるから、 $K(S)$  は 2 次元である。

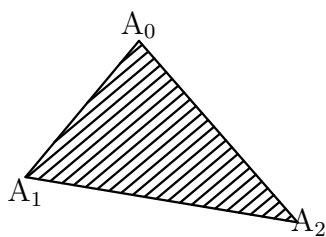


図 1

例 2. 図 2 の  $K$  は条件 (1) を満たし、条件 (2) を満たさない例である:

$$K = \{|A_0, A_1|, |A_2, A_3|, |A_0|, |A_1|, |A_2|, |A_3|\}$$

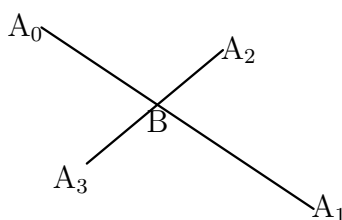


図 2

$S = |A_0, A_1|$ ,  $S' = |A_2, A_3|$  としたとき、その交わり  $B$  は  $K$  の頂点ではないので条件 (2) は満たさない。

例 3. 図 3 の  $K$  は単体複体である。

$$K = \{|A_1, A_2, A_3|, |A_1, A_2|, |A_2, A_3|, |A_3, A_1|, |A_3, A_4|, |A_4, A_1|, |A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|\}$$

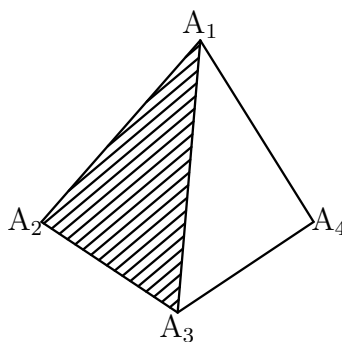


図 3

例 4. 図 4 の  $K$  は 2 つの 1 単体  $|A_3, A_1|$  と  $|A_4, A_5|$  の交わり  $|A_5|$  が 1 単体  $|A_3, A_1|$  の面でないことから条件 (2) が満たされないので単体複体ではない。

$$K = \{|A_1, A_2, A_3|, |A_1, A_2|, |A_2, A_3|, |A_3, A_1|, |A_3, A_4|, |A_4, A_1|, |A_4, A_5|, |A_1|, |A_2|, |A_3|, |A_4|, |A_5|\}$$



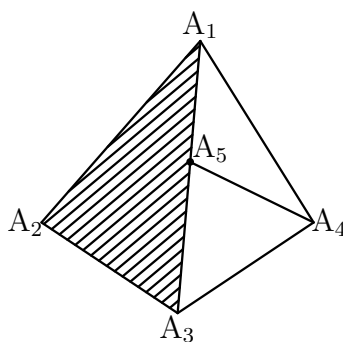


図 4

例 5. 図 5 は図 4 の点  $A_2, A_5$  を結ぶ線分で 2 単体  $|A_1, A_2, A_3|$  を分割したもので、図 4 の  $|A_1, A_2, A_3|$  と  $|A_3, A_1|$  を除き、 $|A_1, A_2, A_5|$ ,  $|A_2, A_3, A_5|$  と  $|A_1, A_5|$ ,  $|A_5, A_3|$  を加えた集合で、これは単体複体である。

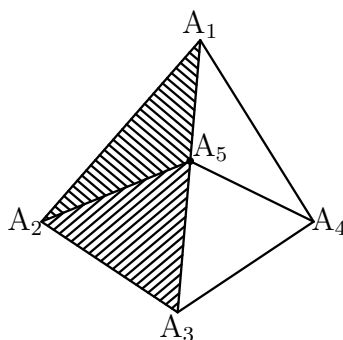


図 5

例 6.  $n$  単体  $S$  に対し、 $K(S)$  から  $S$  を除いた集合を  $K(\partial S)$  とすると、 $K(\partial S)$  は  $(n - 1)$  次元単体複体といえる。例えば、 $S$  が 2 単体  $|A_0, A_1, A_2|$  であるとき、

$$K(\partial S) = \{|A_0, A_1|, |A_1, A_2|, |A_2, A_0|, |A_0|, |A_1|, |A_2|\}$$

となり、これは 1 次元単体複体である。

$K(\partial S)$  は単体  $S$  の境界を表す単体複体である。

定義 単体複体  $K$  に属する全ての単体の和集合を  $K$  の多面体または実現といい  $|K|$  と表す。与えられた図形  $X$  に対し  $X \cong |K|$  (位相同型) となる  $K$  とこの位相同型写像の対を  $X$  の単体分割 または 三角形分割という。

定義 単体複体  $K$  のオイラー数  $\chi(K)$  を

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{\dim K} (-1)^q (K \text{ の } q \text{ 単体の数})$$

で定める。

例 (1) 図 6 の単体を  $S$  とすると、

$$\chi(K(S)) = 3 - 3 + 1 = 1, \quad \chi(K(\partial S)) = 3 - 3 = 0$$

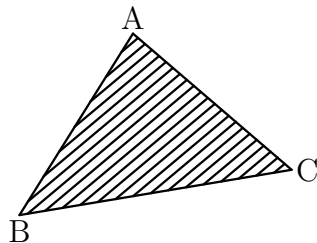


図 6

(2)  $K'$  を図 7 のようにとると  $\chi(K') = 4 - 5 + 2 = 1$ .

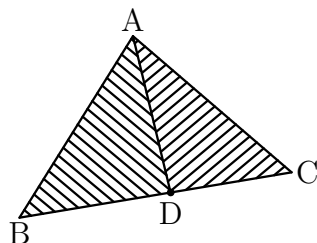


図 7

(3)  $K''$  を図 8 のようにとると  $\chi(K'') = 4 - 4 = 0$ .

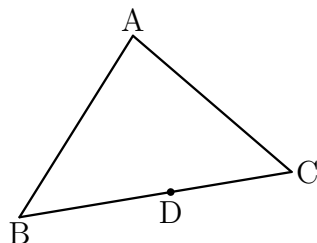


図 8

上の例の (1) は次のように一般化される。

命題  $S$  を  $n$  単体とすると、

$$\chi(K(S)) = 1,$$

$$\chi(K(\partial S)) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ が偶数のとき,} \\ 2 & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

が成り立つ。

証明 等式

$$(1 + (-1))^{n+1} = 0$$

の左辺に二項定理を適用して、等式

$${}_{n+1}C_1 - {}_{n+1}C_2 - \cdots + (-1)^n {}_{n+1}C_{n+1} = 1$$

が得られる。従って

$$\begin{aligned}\chi(K(S)) &= {}_{n+1}C_1 - {}_{n+1}C_2 - \cdots + (-1)^n {}_{n+1}C_{n+1} = 1 \\ \chi(K(\partial S)) &= {}_{n+1}C_1 - {}_{n+1}C_2 - \cdots + (-1)^{n-1} {}_{n+1}C_n = 1 - (-1)^n\end{aligned}$$

が導かれる。□

定義 ある点  $B$  と  $q$  単体  $S = |A_0, \dots, A_q|$  の頂点  $A_0, \dots, A_q$  の計  $q + 2$  個の点が一般の位置にあるとき、

$$B * S := |B, A_0, \dots, A_q|$$

を点  $B$  と単体  $S$  のジョイン (join) という。  $B * S$  は点  $B$  と  $q$  単体  $S$  の点を線分で結んで得られる  $q + 1$  単体である。単体複体  $K$  に対し、点  $B$  が  $K$  に含まれるどの単体とも一般の位置にあり、さらに  $K$  の任意の単体  $S, S'$  に対して、

$$(B * S) \cap (B * S') = B * (S \cap S')$$

が成り立つとき、

$$B * K := \{|B|, S, B * S \mid S \in K\}$$

は単体複体であり、その次元は  $\dim K + 1$  である。これを  $K$  の錐 (cone) という。

$K$  の錐のオイラー数に関して次が成り立つ。

定理  $\chi(B * K) = 1$  .

証明  $B * K$  において

$$\begin{aligned}0 \text{ 単体の個数} &= 1 + (K \text{ の } 0 \text{ 単体の個数}) \\ 1 \text{ 単体の個数} &= (K \text{ の } 1 \text{ 単体の個数}) + (K \text{ の } 0 \text{ 単体の個数}) \\ 2 \text{ 単体の個数} &= (K \text{ の } 2 \text{ 単体の個数}) + (K \text{ の } 1 \text{ 単体の個数}) \\ &\vdots \\ n \text{ 単体の個数} &= (K \text{ の } n \text{ 単体の個数}) + (K \text{ の } (n - 1) \text{ 単体の個数}) \\ (n + 1) \text{ 単体の個数} &= (K \text{ の } n \text{ 単体の個数})\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\chi(B * K) &= 1 + (K \text{ の } 0 \text{ 単体の個数}) \\ &\quad - (K \text{ の } 0 \text{ 単体の個数}) - (K \text{ の } 1 \text{ 単体の個数}) \\ &\quad + (K \text{ の } 1 \text{ 単体の個数}) + (K \text{ の } 2 \text{ 単体の個数}) \\ &\quad - \dots \\ &\quad \vdots \\ &\quad \pm (K \text{ の } (n-1) \text{ 単体の個数}) \pm (K \text{ の } n \text{ 単体の個数}) \\ &\quad \mp (K \text{ の } n \text{ 単体の個数}) \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。□

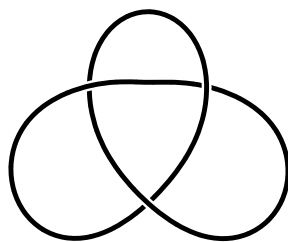
$|K| \cong |K'|$  ならば  $\chi(K) = \chi(K')$  となるので、オイラー数は単体分割可能な図形の位相不変量である。より精密な不変量であるホモロジー群に関しても学習したが、ここでは省略する。

### 3. 結び目の補空間

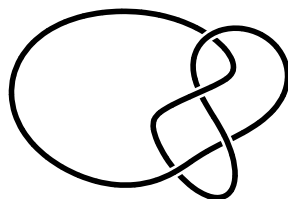
次に、単体ではない基本図形への分割について考察する。分割する図形は結び目の補空間である。

定義 結び目とは、三次元球面  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  の単一閉曲線  $K$  のことである。

例 1. 次の図のような結び目  $K$  を三葉結び目という。



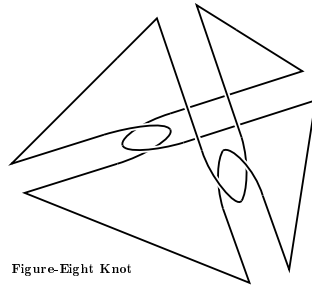
例 2. 次の図のような結び目  $K$  を 8 の字結び目という。



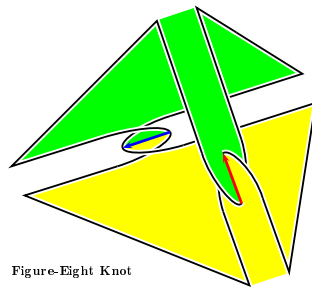
結び目  $K$  の補空間  $S^3 - K$  について考察しよう。

サーストンはプリンストン大学における 1970 年代後半の講義で 8 の字結び目の補空間が 2 つの理想 3 単体に分割できることを証明した [3]。ここで理想  $n$  単体とは  $n$  単体から  $n+1$  個の頂点を取り去ったものをいう。以下でその方法を解説する。

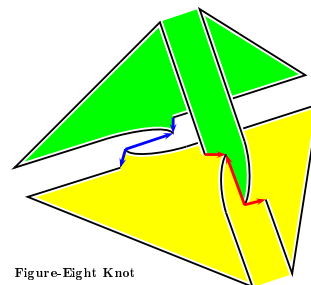
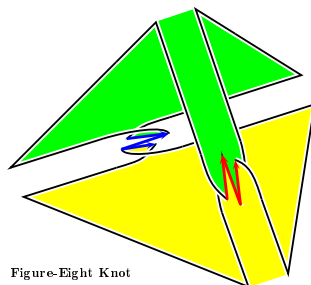
まず、8 の字結び目  $K$  を四面体の辺に沿って並べると以下のようなになる。



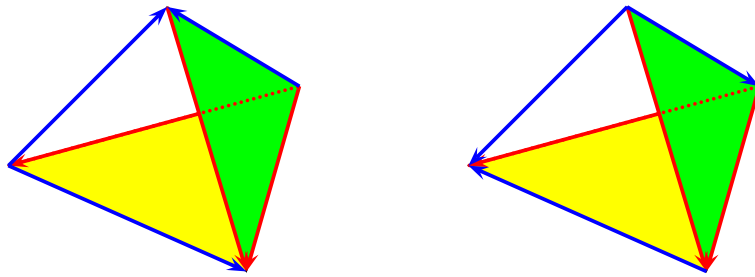
四面体の 4 つの面それぞれに対応して、1 枚ずつ合計 4 枚の膜をはりつける。以下にそのうちの 2 枚の膜をはりつけた図を示す。(残り 2 枚も同様である。)



この 4 枚の膜は  $S^3 - K$  を内側と外側の 2 つの部分にわけると。まず、内側が理想 3 単体であることを観察しよう。膜たちを下図のように切り開いても内側には影響しない。(4 枚の膜のうち 2 枚のみ描いてある。2 枚は省略。)



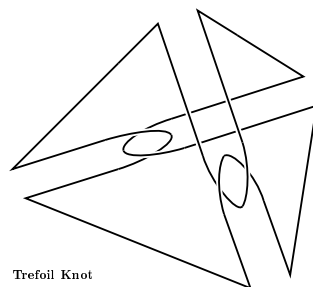
この状態で 4 枚の膜たちは、二次元球面を形成しており、もとの 8 の字結び目は 4 本の曲線にわかれる。それぞれを二次元球面の穴とみなすと、下図左のように理想 3 単体となっていることが分かる。



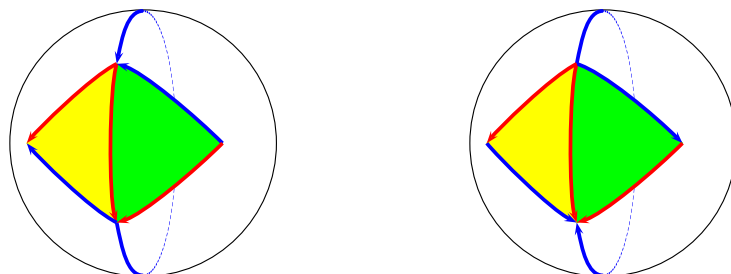
外側も同様に理想3単体になっている(上図右)。これは図全体を裏返すことにより内側と外側を入れかえてみると、矢印の向きが1箇所のみ変わるだけでほとんど同じ図が得られることから分かる。

以上から8の字結び目は2つの理想3単体に分割できることが得られた。

次に、三葉結び目を考える。サーストンは三葉結び目に対しては、今と同様な方法が理想3単体への分割を与えないことも観察している。8の字結び目と同様に四面体の辺に沿って並べて考える。



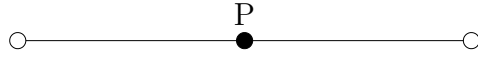
同様に4枚の膜をはって内側と外側に分割すると、どちらも理想3単体にはならない。下図のような「理想胞体」への分割が与えられる。ここで胞体とは、単体と位相同型ではあるが、曲ったり、境界の同一視を許したりするもののことをいい、理想胞体とは、胞体からすべての頂点を取り去ったもののことをいう。



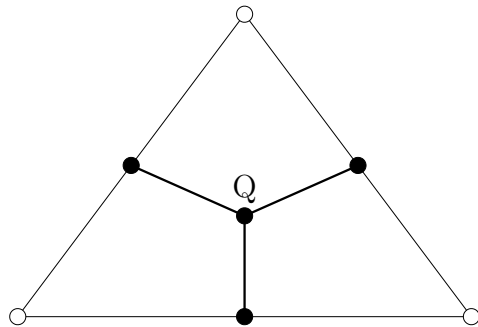
もう一度  $K$  が8の字結び目の場合に戻ろう。

$S^3 - K$  の上のような分割から、 $S^3 - K$  の双対脊柱を構成することができる。

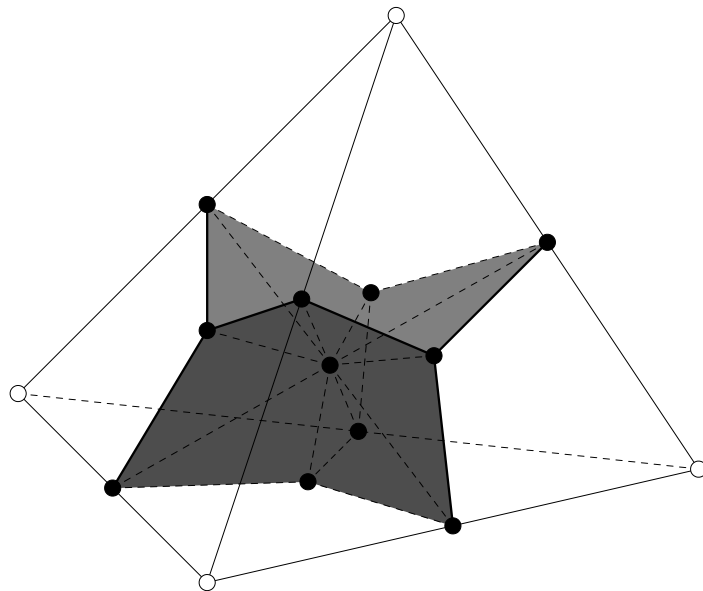
ステップ1 理想1単体の双対脊柱は(任意に選んだ)内部の点P 1点からなる図形である。



ステップ2 理想2単体の双対脊柱は各辺の双対脊柱の和集合と理想2単体の内部の点Qとのジョインである。



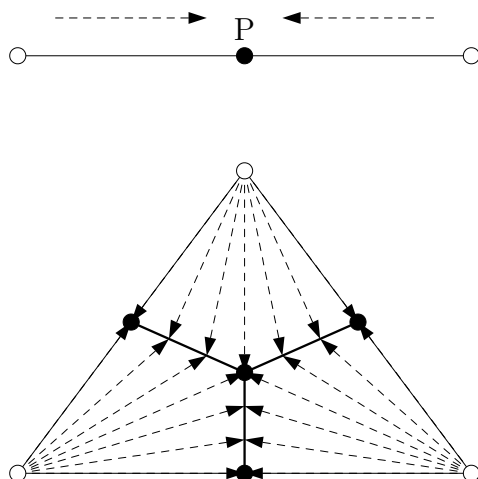
ステップ3 理想3単体の双対脊柱は各面の双対脊柱の和集合と理想3単体の内部の点とのジョインである。



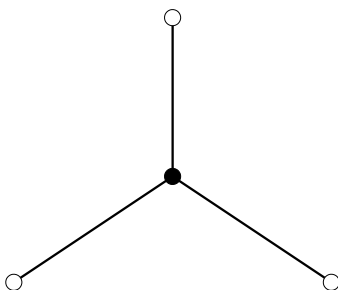
各理想単体の双対脊柱をあわせたものが  $S^3 - K$  の双対脊柱である。これを  $X$  とかこう。  $X$  は  $S^3 - K$  の強変形レトラクトであり、自然な写像

$$\pi : S^3 - K \longrightarrow X$$

がある。



各  $x \in X$  に対して  $\pi^{-1}(x)$  は有限個の半開区間を端点ではりあわせたものになっている。このような脊柱を一般によい脊柱とよぶことにする。



三葉結び目の場合にも同様にしてよい双対脊柱を構成することができる。

さて、 $S^3$  における  $K$  の管状近傍を  $N(K)$  とし、一般の結び目  $K$  に対して四次元の図形  $M(K)$  を次のように定める：

$$M(K) = \partial((S^3 - \text{int}N(K)) \times D^2)$$

Hegenbarth と Repovš [1] は  $S^3 - K$  がよい脊柱をもてば、 $M(K)$  に対する位相カテゴリー手術障害類理論が成り立つことを証明している。従って我々の考察により  $K$  が 8 の字結び目や三葉結び目のとき、彼らの議論が適用できることが分かった。Hegenbarth と Repovš は三葉結び目を含むトラス結び目と呼ばれる結び目たちに対して、よい脊柱の構成を行った。一方、山崎は 8 の字結び目を含む双曲



結び目たちに対して、理想単体・胞体分割を用いたよい脊柱の構成を行った（上の構成）。我々は、三葉結び目に対してもその方法が使えることを観察した。これは Hegenbarth と Repovš の方法とは異なっている。すべての  $K$  に対して  $S^3 - K$  が同様な理想胞体分割をもつと思われるが、残念ながらそこまで調べることができなかった。

## 参考文献

1. F. Hegenbarth, D. Repovš, Applications of controlled surgery in dimension 4: Examples, preprint (J. Math. Soc. Japan に掲載予定).
2. 柘田幹也, 講座 数学の考え方 15 代数的トポロジー, 朝倉書店, 2002.
3. W. P. Thurston, The geometry and topology of three-manifolds, プリンストン大学における講義録。www.msri.org/publications/books/gt3m/ で入手可能。一部は書籍にもなっている: Three-dimensional geometry and topology. Vol.1, Princeton Mathematical Series, 35. Princeton University Press, 1997.