

幾何ゼミ卒論発表

S04S029 木村 泰彰

基礎理学科

2008年2月29日

3 彩色可能性について

3 彩色可能である定義

3 色の色を用意する。結び目や絡み目のある射影図の各アークに対して、次の条件をみたすように色を塗ることができるとき、その結び目または絡み目は **3 彩色可能** であるという。

3 彩色可能である定義

3 色の色を用意する。結び目や絡み目のある射影図の各アークに対して、次の条件をみたすように色を塗ることができるとき、その結び目または絡み目は **3 彩色可能** であるという。

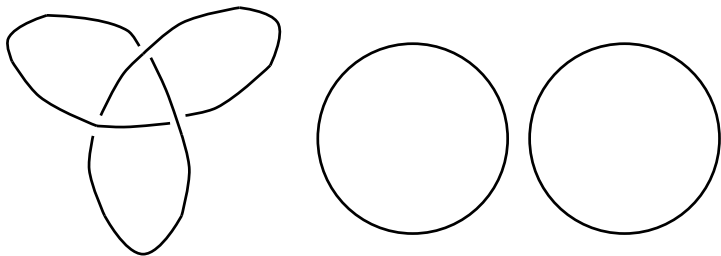
(a) 全体で少なくとも 2 色が使われている。

3 彩色可能である定義

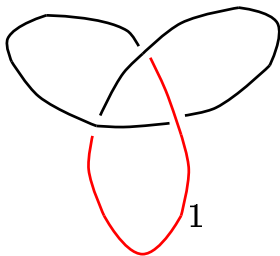
3 色の色を用意する。結び目や絡み目のある射影図の各アークに対して、次の条件をみたすように色を塗ることができるとき、その結び目または絡み目は **3 彩色可能** であるという。

- (a) 全体で少なくとも 2 色が使われている。
- (b) 2 色以上が現われる交点では、3 色がすべて現われる。

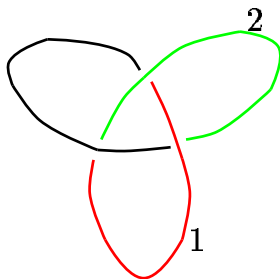
3 彩色可能な例



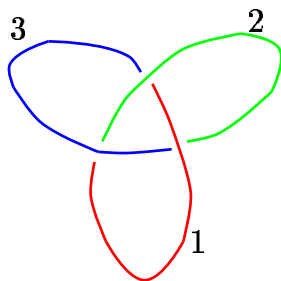
3 彩色可能な例



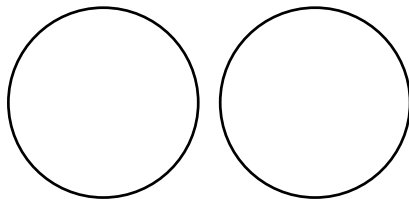
3 彩色可能な例



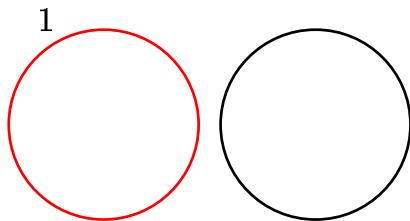
3 彩色可能な例



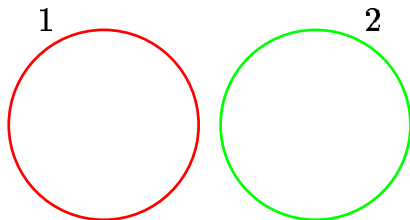
3 彩色可能な例



3 彩色可能な例

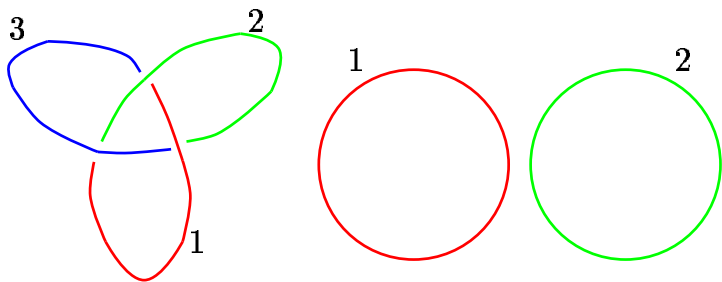


3 彩色可能な例



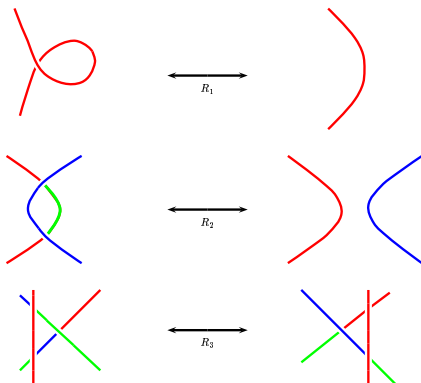
注) 右図の射影図は 2 色しかないが交点がないので、3 番目の色は必要ない。

3 彩色可能な例



ライデマイスター移動は3彩色可能性を保つことができるのか？

ライデマイスター移動は3彩色可能性を保つことができるのか？



定理

2つの同値な絡み目の一方が3彩色可能ならば、他方も3彩色可能である。

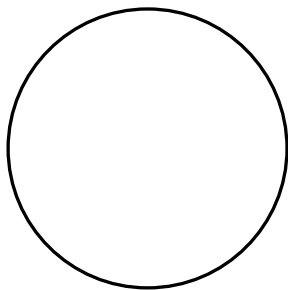
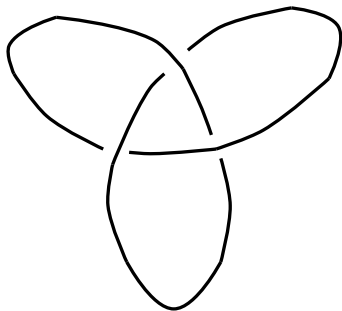
定理

2つの絡み目の一方が3彩色可能で、他方が3彩色可能でないならば、それらは同値ではない。

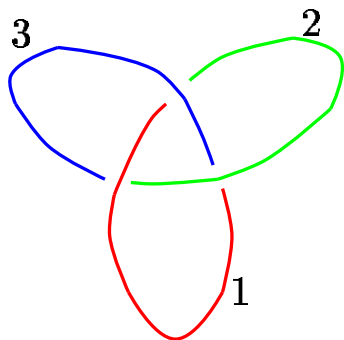
定理

アンノット U と同値ではない結び目が存在する。

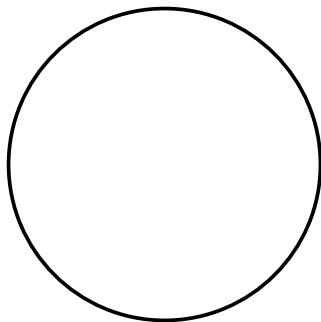
3 彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる



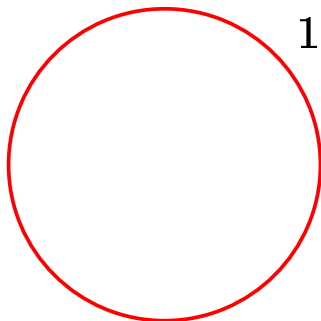
3彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる



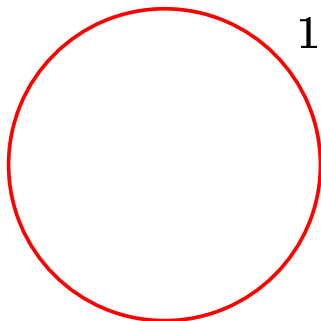
3 彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる



3 彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる

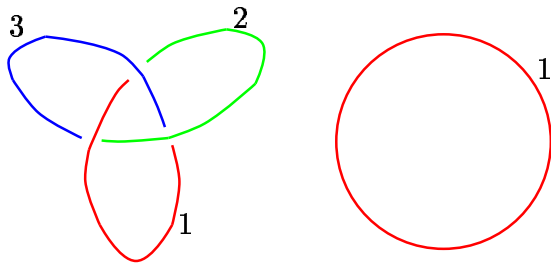


3 彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる

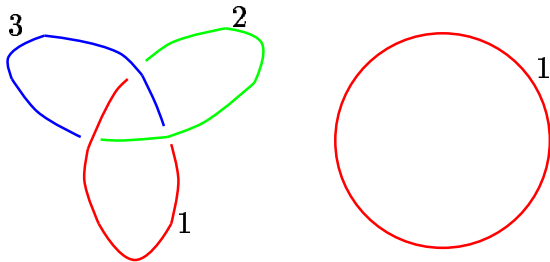


1 色しか使われてないので 3 彩色可能ではない。

3 彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる



3 彩色可能性によって右手系三葉結び目とアン ノット U を区別できる

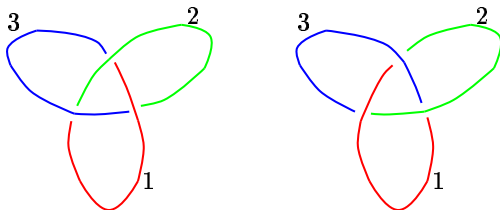


練習問題

3 彩色可能性によって左手系三葉結び目と右手系三葉結び目を区別できるか。

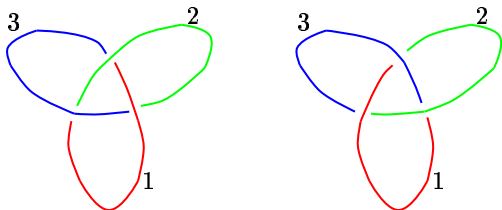
練習問題

3 彩色可能性によって左手系三葉結び目と右手系三葉結び目を区別できるか。



練習問題

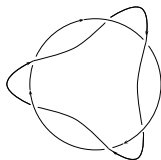
3 彩色可能性によって左手系三葉結び目と右手系三葉結び目を区別できるか。



どちらも 3 彩色可能であるので右手系三葉結び目と左手系三葉結び目を区別できない。

問題

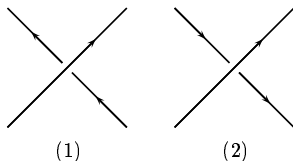
下図の射影図をもつ 2 成分の向きが付いた絡み目を L とする。



- (a) L の絡み数を求めよ。
- (b) L の向きを無視して考える。 L は 3 彩色可能か。もし 3 彩色可能ならば射影図のアークを 3 色で塗り、3 彩色可能でないならばその理由を説明せよ。

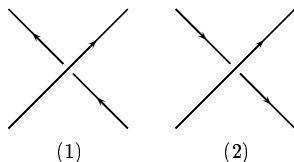
(a) で絡み数という語が出てきた。ここで絡み数の定義について説明する。

絡み数の定義



(a) 上図の異なる 2 成分の向きが付いた絡み目が交わる交点において、右巻きの交点 (図の 1) には $+1$ を、左巻きの交点 (図の 2) には -1 をそれぞれ対応させる。

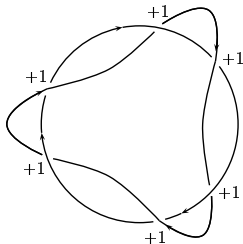
絡み数の定義



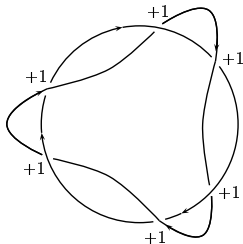
(a) 上図の異なる 2 成分の向きが付いた絡み目が交わる交点において、右巻きの交点 (図の 1) には $+1$ を、左巻きの交点 (図の 2) には -1 をそれぞれ対応させる。

(b) 異なる成分が交わる交点があるときは (a) で与えた $+1$ と -1 を足して 2 で割った数を、またそのような交点がなければ 0 を向きの付いた絡み目の絡み数と定義する。

(a) の解答



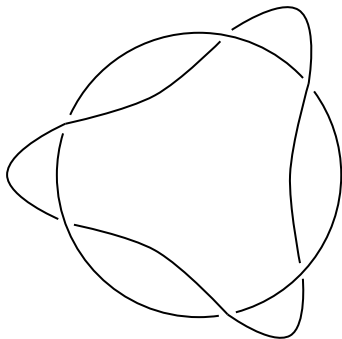
(a) の解答



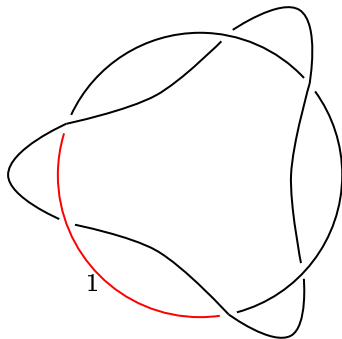
上図より L の絡み数は次のようになる:

$$\frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1}{2} = 3.$$

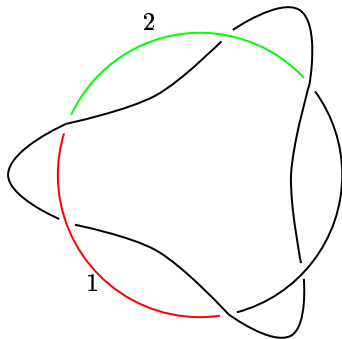
(b) の解答

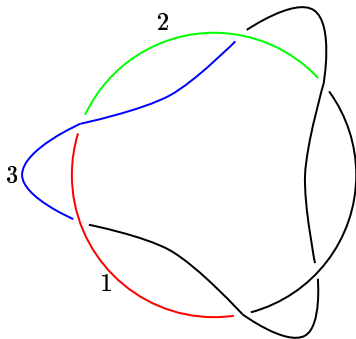


(b) の解答

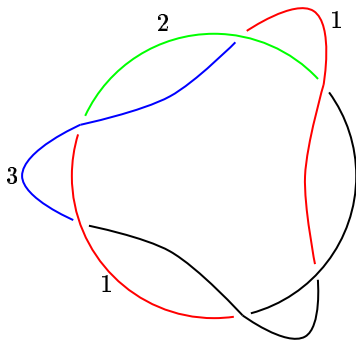


(b) の解答

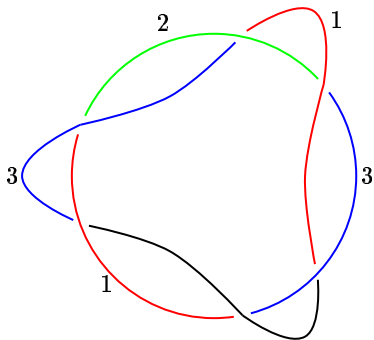


(b) の解答

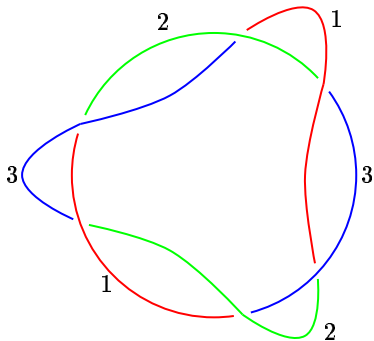
(b) の解答



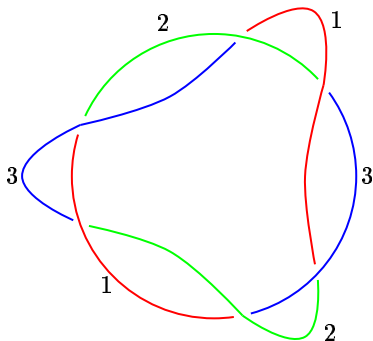
(b) の解答



(b) の解答



(b) の解答



上図より、3色全部を使って3彩色されているので3彩色可能である。